EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
28 novembre 2024

Analyse I – Série 11

Exercice 1. (Dérivées d'ordre supérieur)

Objectif: Calculer les dérivées d'ordre supérieur des fonctions données.
Théorie nécessaire: Formules et règles des dérivées données au cours 18 et 19.
Dans les trois cas suivants, calculer $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction f :

i) $f(x) = x^m \quad (m \in \mathbb{Z})$ *ii)* $f(x) = \sin(2x) + 2\cos(x)$ *iii)* $f(x) = \ln(x)$

Exercice 2. (Dérivation logarithmique)

Objectif: Calculer les dérivées des fonctions données par la méthode de dérivation logarithmique
Théorie nécessaire: Méthode de dérivation logarithmique donnée au cours 19.
Calculer la dérivée f' de f par dérivation logarithmique: $f'(x) = f(x) \cdot (\ln(f(x)))'$

i) $f(x) = (x^2+1)^2\,(x+2)^3(x-1)^5$ *ii)* $f(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{11} \left(1+\sin^2(kx)\right)^k$

Exercice 3. (Dérivée de la valeur absolue)

Objectif: Calculer les dérivées de la fonction donnée.
Théorie nécessaire: Dérivé de la fonction valeur absolue discutée au cours 18.
Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x| + e^x$. Calculer f' et tracer les graphiques de f et f'.

Exercice 4. (Dérivée de la fonction réciproque)

Objectif: Calculer les dérivées des fonctions réciproques données.
Théorie nécessaire: Méthode de dérivation d'une fonction réciproque donnée au cours 19.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction injective sur l'intervalle $I \subset D(f)$. Etudier la dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} et calculer sa fonction dérivée.

i) $f(x) = \tan(x) \quad \text{sur } I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *ii)* $f(x) = \cos(x) \quad \text{sur } I = [0, \pi]$

iii) $f(x) = x^2 \quad \text{sur } I = [0, \infty[$ *iv)* $f(x) = \dfrac{1}{x^4} \quad \text{sur } I =]0, \infty[$

v) $f(x) = e^{-x} \quad \text{sur } \mathbb{R}$ *vi)* $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{sur } \mathbb{R}$

vii) $f(x) = \sinh(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}$ *viii)* $f(x) = \cosh(x) \quad \text{sur } I = [0, \infty[$

ix) $f(x) = \tanh(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}$

Exercice 5. (Théorème des accroissements finis)
Objectif: Appliquer le théorème des accroissements finis pour démontrer les propriétés des fonctions.
Théorie nécessaire: Théorème des accroissements finis et exemples d'application donnés au cours 20.

i) Trouver des bornes inférieure et supérieure à la valeur de $\tan\left(\frac{5\pi}{24}\right)$.

ii) Soit $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^3} + \dfrac{1}{(x-4)^5}$. (a) Calculer le domaine de f. (b) Utiliser le Théorème de la Valeur Intermédiaire pour démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution réelle. (c) Utiliser le Théorème des accroissements finis pour montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement une solution dans $\mathbb{R}$.

iii) Soit $s \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + s = 0$ possède au plus 2 solutions réelles.

iv) Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction deux fois continûment dérivable. Supposons aussi que $f(-3) = -3$, $f(3) = 3$ et $f(10) = 10$. Démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f''(c) = 0$.

Exercice 6. (Règle de Bernoulli-l'Hospital)

Objectif: Calculer les limites par la règle de Bernoulli-l'Hospital.
Théorie nécessaire: Théorème de Bernoulli-l'Hospital et ses applications données au cours 20.
Calculer les limites suivantes :

i) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2}$ *ii*) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\tanh(x) - 1\right)$ *iii*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(1 + \sin(x)\right)^{1/x}$

iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x - \sin(x)}$ *v*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$ *vi*) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\pi x}$

vii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\tan(x)}$ *viii*) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \left(x\tan(x) - \frac{\pi}{2\cos(x)}\right)$ *ix*) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

Exercice 7. (Limites des suites)

Objectif: Calculer les limites des suites à partir des limites des fonctions.
Théorie nécessaire: Limites connues des fonction et la règle Bernoulli-l'Hospital.
Calculer les limites suivantes :

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(e^{1/n} - 1\right)$ *ii*) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 8. (Points stationnaires et extremums)

Objectif: Trouver les extremums des fonctions.
Théorie nécessaire: Méthodes données au cours 19, 20, 21.
Trouver les extremums locaux de la fonction f ainsi que le maximum et le minimum dans l'intervalle donné :

i) $f(x) = x^2 - \left|x + \frac{1}{4}\right| + 1$ sur $[-1, 1]$ *ii)* $f(x) = (x-1)^2 - 2\,|2-x|$ sur $]2, 3[$

Exercice 9. (V/F : Propriétés de f et f' sur un intervalle)

Objectif: Interprêter et évaluer les énoncés concernant les fonctions dérivables sur un intervalle.
Théorie nécessaire: Définitions et propriétés données au cours 21

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b] \subset D(f)$, $a < b$, et dérivable sur $]a, b[$.

Q1 : Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in\,]a, b[$, alors f est croissante sur $[a, b]$.

Q2 : Si f est croissante sur $[a, b]$, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in\,]a, b[$.

Q3 : Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in\,]a, b[$.

Q4 : Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in\,]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.

Q5 : Si la tangente au point $\big(c, f(c)\big)$ avec $c \in\,]a, b[$ est horizontale, alors f admet un extremum en c.